Neformální úvod

V čem spočívá matematické poznání?

Příklady. *1. Není-li n dělitelné třemi, potom existuje k, že platí $n = 3k+1$, nebo $n = 3k+2$.*

2. Je-li n^2 dělitelné třemi, potom je n dělitelné třemi.

3. $\sqrt{3}$ není racionální

Výrok bude pro nás každé vyjádření, o kterém lze jednoznačně říci, že je buď pravda, nebo nepravda. To že je výrok pravda budeme často zkráceně označovat číslicí 1 a to, že je nepravda, číslicí 0.

Vyjádřeno podrobněji, musí tedy výroky splňovat následující dvě pravidla (zákony):

- výrok nemůže být zároveň pravda i nepravda (zákon sporu),
- výrok nemůžne nabývat jiné hodnoty, než je pravda nebo nepravda (zákon vyloučeného třetího).

Z výroků můžeme vytvářet výroky nové pomocí logických spojek (operací) $\neg$ (negace, opak), $\wedge$ (konjunkce, logické a), $\vee$ (disjunkce, logické nebo), $\implies$ (implikace), $\iff$ (ekvivalence). Tyto spojky jsou zadány (definovány) pravdivostními tabulkami:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$	$A \iff B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Na procvičení: ve skutečnosti si vystačíme jen se spojkami $\neg$ a $\implies$, $A \vee B$ můžeme vyjádřit jako $(\neg A) \implies B$, $A \wedge B$ jako $\neg(A \implies (\neg B))$ a s její pomocí pak $A \iff B$ jako $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$.

Příklady. *Podívejme se ještě na následující výroky (a jejich pravděpodobnostní tabulky):*

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B) \implies (\neg A)$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$
1	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*

Hodnoty v pátem a sedmém spoupci se nápadně podobají hodnotám pro $A \implies B$. Jde o alternativní vyjádření implikace, které označujeme jako nepřímý důkaz (pátý sloupec) a důkaz sporem (sedmý sloupec).

Výroková funkce je přiřazení výroku prvkům z nějaké skupiny objektů (definičního oboru). Jde tedy o výrok závislý na parametru (skupině parametrů - tzv. **proměnných**). Tyto proměnné můžeme kvantifikovat pomocí kvantifikátorů:

- **existenčního** (malého) kvantifikátoru, který zapisujeme symbolem $\exists$ a čteme existuje, tj. například $\exists n \in \mathbb{N}: \; n > 4$ čteme jako existuje n z $\mathbb{N}$, že $n > 4$
- **univerzálního** (obecného, velkého) který zapisujeme symbolem $\forall$ a čteme pro všechna, tj. například $\forall n \in \mathbb{N}: \; n > 4$ čteme pro všechna n z $\mathbb{N}$ platí, že $n > 4$

Výrok z kvantifikátory pak budeme nazývat **výrokovou formou**. Negaci takových výroků určujeme podle následujících pravidel:

- $(\neg(\exists x \in X : A(x))) \iff (\forall x \in X : \neg A(x))$
- $(\neg(\exists x \in X : A(x))) \iff (\forall x \in X : \neg A(x))$

Negaci výrokových forem s více kvantifikátory pak negujeme postupně aplikováním pravidel výše.

Příklad. *Negace výroku*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}: \; n > x$$

je výrok

$$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; n \leq x$$

Poznamenejme ještě, že (obecně) **záleží na pořadí** kvantifikátorů, například výroky

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}: \; n > x$$

a

$$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; n > x$$

mají jiný význam (zároveň první je pravda a druhý nepravda). Jediný případ, kdy můžeme (obecně) pořadí kvantifikátorů zaměnit je, když máme vedle sebe dva nebo více kvantifikátorů stejného typu.

Chceme-li dokázat výrok (výrokovou formu) typu

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_0 : A(n)$$

můžeme použít **důkaz indukcí**. V něm postupujeme ve dvou krocích:

1. ověříme platnost výroku $A(n_0)$ (počáteční krok),
2. pro každé $n \geq n_0$ dokážeme implikaci $A(n) \implies A(n+1)$ (indukční krok, předpoklad, že je $A(n)$ ravda nazýváme **indukční předpoklad**)

Příklad. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$.*

Poznamenejme, že to, co jsme nazvali matematickou indukcí bývá také (přesněji) nazýváno **slabou** matematickou indukcí, v případě **silné** matematické indukce pak nahrazujeme indukční předpoklad pravdivosti $A(n)$ předpokladem pravdivosti $A(n_0), \ldots, A(n)$.

Číselné obory, základní vlastnosti reálných čísel (už o něco formálněji)

Pojem **množina** jsme definovali jako soubor prvků, které jsou určeny buď výčtem, nebo nějakou společnou vlastností (problémy s tím spojené budeme diskutovat později). Definovali jsme **kartézský součin** množin M a N nako

$$\{(m, n): \ m \in M, \ n \in N\}.$$

Binární operaci na množině M jsme definovali jako přiřazení prvku z množini M prvkům z množiny $M \times M$. **Binární relaci** na množině M jsme definovali jako podmnožinu $M \times M$.

Příklady. *Příkladem binárních operací jsou například $+$ a $\cdot$ (na přirozených, celých, racionálních, reálných číslech apod.). Příkladem relace může být $=$, nebo $<$ (na stejných množinách).*

Začali jsme diskuzi operací $+$ a $\cdot$ (na přirozených, celých, racionálních, reálných číslech ap.) a jejich různých vlastností:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita $+$)
2. $x + y = y + x$ (komutativita $+$)
3. $x + 0 = x$ (neutralita 0 vzhledem k $+$)
4. existuje $-x$ pro které platí $x + (-x) = 0$ (existence inverzního prvku pro $+$)
5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita $\cdot$)
6. $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita $\cdot$)
7. $x \cdot 1 = x$ (neutralita 1 vzhledem k $\cdot$)
8. pokud $x \neq 0$, potom existuje x^{-1}, pro které platí $x \cdot x^{-1} = 1$ (existence inverzního prvku vzhledem k $\cdot$)
9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita)

Příklady. 1. *Pokud operace $+$ a $\cdot$ na množině $\{0, 1\}$ splňují podmínky 1.–9., potom už nutně*

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0,$$

a

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Dostameme tak tzv. těleso $\mathbb{Z}_2$.

2. *Pro dvojice* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ *definujeme operace* $\oplus$ *a* $\odot$ *jako*

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Pokud ztotožníme dvojice do skupin (tříd ekvivalence) podle relace $a \cdot d = b \cdot c$ *dostaneme racionální čísla.*

3. *Pro dvojice* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *definujeme operace* $\oplus$ *a* $\odot$ *jako*

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c).$$

Položením $i = (0, 1)$ *dostáváme* $i^2 = (-1, 0)$. *Takto dostaneme klasická komplexní čísla.*

Na procvičení. *Zkuste sami ověřit že výše uvedené příklady jsou tělesa. Jak v nich vypadají prvky* 0 *a* 1 *a jaký tvar mají inverzní prvky?*

Definice 1 (těleso)**.** *Uspořádaná pětice* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *se nazývá těleso, pokud* T *je množina,* $0 \neq 1$ *prvky* T *a* $+$ *a* $\cdot$ *operace na* T *takové, že pro všechna* $x, y, z \in T$ *platí:*

1. $x + y = y + x$ *(komutativita* $+$*)*
2. $x \cdot y = y \cdot x$ *(komutativita* $\cdot$*)*
3. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(asociativita* $+$*)*
4. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(asociativita* $\cdot$*)*
5. $x + 0 = x$ *(neutralita 0 vzhledem k* $+$*)*
6. $x \cdot 1 = x$ *(neutralita* 1 *vzhledem k* $\cdot$*)*
7. *existuje* $-x \in T$ *pro které platí* $x + (-x) = 0$ *(existence inverzního prvku pro* $+$*)*
8. *pokud* $x \neq 0$, *potom existuje* $x^{-1} \in T$, *pro které platí* $x \cdot x^{-1} = 1$ *(existence inverzního prvku vzhledem k* $\cdot$*)*
9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *(distributivita)*

Definice 2 (ostré lineární uspořádání)**.** *Relaci* $<$ *na množině* M *nazveme ostrým lineárním (úplným) uspořádáním na* M, *pokud pro každé* $x, y, z \in M$ *platí*

1. $x < y$, $x > y$ *nebo* $x = y$,
2. *pokud* $x < y$ *a* $y < z$, *potom* $x < z$,
3. *neplatí* $x < x$.

Místo ostré lineární uspořádání budeme zpravidla říkat jednoduše uspořádání (jiné varianty uspořádáni nebudeme definovat).

Příklady. *Tělesy jsou například* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{C}$ *s obyklými operacemi* $+$ *a* $\cdot$ *a také* $\mathbb{Z}_p$ *se sčítáním a násobením modulo* p *pro* p *prvočíslo.*

Definice 3 (uspořádané těleso)**.** *Šestici* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$*, kde* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je těleso a* $<$ *je uspořádání na* T*, nazveme uspořádaným tělesem, pokud pro všechna* $x, y, z \in T$ *platí*

1. *pokud* $x < y$*, potom* $x + z < y + z$*,*
2. *pokud* $x < y$ *a* $z > 0$*, potom* $x \cdot z < y \cdot z$*.*

Příklady. $\mathbb{Q}$ *je uspořádané těleso,* $\mathbb{Z}_2$ *ani* $\mathbb{C}$ *nejsou.*

Definice 4 (omezená množina, sup, inf)**.** *Nechť* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$*, kde* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je uspořádané těleso a* $M \subset T$*. Prvek* $x \in T$ *nazýváme*

1. *horní závorou množiny* M*, pokud pro každé* $y \in M$ *platí* $y \leq x$
2. *dolní závorou množiny* M*, pokud pro každé* $y \in M$ *platí* $y \geq x$
3. *supremem množiny* M*, pokud pro každé* y *horní závoru* M *platí* $y \geq x$*,*
4. *infimem množiny* M*, pokud pro každé* y *dolní závoru* M *platí* $y \leq x$*,*

Množinu M *nazýváme zdola (shora) omezenou, pokud má nějakou dolní (horní) závoru,* M *nazveme omezenou, pokud je zdola i shora omezená.*

Reálná čísla (značíme $\mathbb{R}$) jsou (až na izomorfizmus) jednoznačně určené uspořádané těleso T s následující vlastností: každá neprázdná shora omezená podmnožina T má (v T) supremum (axiom suprema).

Poznámky a příklady.

1. *To, že* x *je supremem množiny* M *můžeme alternativně vyjádřit následovně:*
   - x *je horní závora* M *a*
   - *pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $y \in M$ *takové, že* $y > x - \varepsilon$

   Příklad: $\sup(0, 1) = 1$.

2. *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $n \leq x < n + 1$*. Toto* n *(jednoznačně určené) zazývame (dolní) celou částí* x *a značíme* $\lfloor x \rfloor$*. Pomocí pojmu suprema toto číslo definujeme následovně: nechť*

   $$M = \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq x\}, \quad a \quad s = \sup M.$$

   Potom (podle předchozí poznámky - pro $\varepsilon = 1$*) dostaneme, že existuje* $n \in M$ *splňující* $n > s - 1$*. Protože* $n \in M$*, máme* $n \leq x$ *a pokud by platilo* $n + 1 \leq x$ *(tj. neplatilo* $x < n + 1$*) potom musí platit* $n + 1 \in M$ *a tedy* $n + 1 \leq s$ *(*s *je horní závora* M*), což je ale ve sporu s volbou* n*. Pak už jen položíme* $\lfloor x \rfloor = n$*.*

3. *Existuje (jednoznačně určené) $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, pro které platí $s^2 = 3$ - tedy zkráceně řečeno $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ (jak už víme, takové x neexistuje v $\mathbb{Q}$). Toto s definujeme předpisem*

$$s = \sup\{y \geq 0 : y^n < x\}.$$

Podle definice uspořádání musí platit (právě) jedna z možností $s^2 < 3$, $s^2 > 3$, nebo $s^2 = 3$. Pokud by platila první nebo druhá možnost, pak pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ bude platit nerovnost $(s+\varepsilon)^2 < 3$ (resp, $(s-\varepsilon)^2 > 3$), což je v obou případech ve sporu s definicí suprema. Musí tedy platit poslední možnost $s^2 = 3$.

4. *Podobným způsobem jako v předchozím případě můžeme definovat n-tou odmocninu z libovolného $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ (značíme $x^{\frac{1}{n}}$ nebo $\sqrt[n]{x}$) a to předpisem*

$$x^{\frac{1}{n}} = \sup\{y \geq 0 : y^n < x\}.$$

Věta 5 (Archimedova vlastnost $\mathbb{R}$)**.** *Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.*

Věta 6 (hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** *Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že platí $a < p < b$. Zároveň existuje $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že platí $a < q < b$.*

Věta 7 (o existenci infima)**.** *Každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.*

Množiny a zobrazení

Množiny zadáváme výčtem - $\{\}$, $\{3, 1-i\}$ apod. - nebo ve tvaru $\{x \in X : \varphi(x)\}$, kde φ je výroková funkce na množině X. Budeme používat následující značení:

- $(A \subseteq B) \iff (\forall x \in A : x \in B)$ (A je **podmnožinou** B),
- $(A = B) \iff ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$ (A **je rovná** B),
- $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ (**průnik** A s B),
- $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ (**doplněk** B v A),
- $A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ (**sjednocení** A a B), kde X je množina, $A, B \subseteq X$.

Platí (de Morganovy vzorce)

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Budeme používat i

- $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \in X :\ \exists \alpha \in A :\ x \in M_\alpha\}$,
- $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \in X :\ \forall \alpha \in A :\ x \in M_\alpha\}$,

kde $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém podmnožín X (indexovaný množinou A). Opět platí

- $X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus M_\alpha)$,
- $X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus M_\alpha)$.

Podmnožinu $F \subseteq X \times Y$ budeme nazývat **zobrazením z** X **do** Y (zkráceně píšeme $F : X \to Y$) pokud

- $\forall x \in X\ \exists y \in Y :\ (x, y) \in F$,
- $\forall (x, y) \in F\ \forall (u, v) \in F :\ (x = y) \implies (u = v)$.

Místo $(x, y) \in F$ píšeme $F(x) = y$. Množinu X nazýváme **definičním oborem** zobrazení F (značíme D_F), množinu $R_F = \{y \in Y : \exists x \in X :\ F(x) = y\}$ nazýváme **oborem hodnot** F. Je-li $F : X \to Y$ říkáme, že je F

- z X **na** Y, pokud $\forall y \in Y\ \exists x \in X : F(x) = y$ (značíme též $F : X \overset{\text{na}}{\to} Y$),
- **prosté**, pokud $\forall x \in X\ \forall z \in X :\ (x \neq z) \implies (F(x) \neq F(z))$.

Je-li $F : X \to Y$ prosté a na definujeme **inverzní zobrazení** $F^{-1} : Y \to X$ předpisem $F^{-1}(y) = x \iff F(x) = y$.

Pro zobrazení $F : X \to Y$ a $G : Z \to W$, kde $R_F \subset Z$ definujeme složené zobrazení $G \circ F : X \to W$ předpisem $G \circ F(x) = G(F(x))$, $x \in X$.

Na procvičení. *Platí* $(F^{-1})^{-1} = F$ *a* $F^{-1} \circ F(x) = x$.

Spojitost a limita funkcí jedné reálné proměnné

Reálnou (**komplexní**) **funkcí** jedné reálné proměnné budeme rozumět zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Budeme používat obvyklé značení intervalů, např. $(a, b] = \{z \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ a rovněž značení $|x| = \max\{-x, x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Platí

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \text{(trojúhelníková nerovnost)}.$$

Definice 8 (okolí a prstencové okolí)**.** *Pro* $a \in \mathbb{R}$ *a* $\delta > 0$ *definujeme množiny*

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\},$$
$$P(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$$

a nazýváme je ***okolí*** *a* ***prstencové okolí*** *bodu* a *s poloměrem* δ.

Definice 9 (limita a spojitost funkce - část 1)**.** *Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f je **spojitá v bodě** a, pokud platí:*

$$(S) \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

*Nechť f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f **má v bodě** a **limitu** $L \in \mathbb{R}$ (píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$), pokud platí:*

$$(L) \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Poznámky a příklady. *1. Platí*

$$\begin{aligned} (L) &\iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon) \\ &\iff \exists C > 0\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : |f(x) - L| < C\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogicky pro výrok (S).

2. *(jednoznačnost limity)*

$$\left(\left(\lim_{x \to a} f(x) = L \right) \wedge \left(\lim_{x \to a} f(x) = M \right) \right) \implies (L = M).$$

3. *Je-li f definována na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, potom*

$$(f \text{ je spojitá v } a) \iff \left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \right)$$

4. *(extrémně důležitá) Pokud $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) = g(x)$ a $L \in \mathbb{R}$, potom*

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = L \right) \iff \left(\lim_{x \to a} g(x) = L \right).$$

5. *Pro $A, B \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = Ax + B$ spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}$.*

6. *Definujme (tzv. Dirichletovu funkci)*

$$f(x) = \begin{cases} 1: & x \in \mathbb{Q}, \\ 0: & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Potom f je nespojitá ve všech bodech množiny $\mathbb{R}$. Na rozmyšlenou: f nemá limitu v žádném bodě množiny $\mathbb{R}$.

7. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} x + a = 2a.$

Lemma 10 (limita a omezenost)**.** *Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, potom*

1. $\exists C > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : |f(x)| < C,$

2. pokud $L \neq 0$ *potom* $\exists D > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a,\delta) : \dfrac{1}{|f(x)|} < D$,

Věta 11 (aritmetika limit - verze 1). *Je-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *potom:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$,
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
3. *pokud* $B \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Důsledek 12 (aritmetika spojitosti). *Nechť* f *a* g *jsou spojité v bodě* a, *potom i funkce* $f + g$ *a* $f \cdot g$ *jsou spojité v* a. *Je-li navíc* $g(a) \neq 0$ *potom je v* a *spojitá i funkce* $\frac{f}{g}$.

Příklady. *Jsou-li* P *a* Q *polynomy, potom platí*

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

za předpokladu, že a *není kořenem* Q. *Speciálně platí, že (racionální) funkce* $\dfrac{P}{Q}$ *je spojitá ve všech bodech* $\mathbb{R}$ *kromě kořenů* Q.

Jak ale například spočítat limitu $\lim\limits_{x\to a} x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}$? *Jde sice o součin, ale aritmetiku limit nelze použít.*

Věta 13 (o dvou strážnících). *Nechť pro funkce* f, g *a* h *platí následující podmínky:*

- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$,
- $\exists \delta > 0\, \forall x \in P(a,\delta) : g(x) \leq (x) \leq h(x)$.

Potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Příklad. *Limitu z předchozího příkladu už teď spočítáme snadno, platí totiž*

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \leq x^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a protože $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ *dostáváme, že* $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Později v průběhu semestru si ukážeme, že platí limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ *(a ještě mnohem později, že funkce* sin *exsituje). Co kdybychom ale chtěli spočítat limitu* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(f(x))}{f(x)}$, *kde* f *je funkce z minulého příkladu?*

Věta 14 (limita složené funkce)**.** *Nechť platí* $\lim_{x\to A} f(x) = B$ *a* $\lim_{x\to B} g(x) = C$. *Předpokládejme navíc, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

(S) *g je spojitá v bodě B,*

(P) $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(A,\delta) : f(x) \neq B$.

Potom $\lim_{x\to A} g\circ f(x) = C$.

Tzv. známé limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Z nich pak lze odvodit další tzv. známé limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1, \quad \left(\text{alternativně} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1\right)$$

Definice 15 (jednostranné okolí)**.** *Pro* $a \in \mathbb{R}$ *a* $\delta > 0$ *definujeme* ***levé a pravé okolí*** *bodu a s poloměrem* δ *jako*

$$U_-(a,\delta) = (a-\delta, a], \quad U_+(a,\delta) = [a, a+\delta).$$

Rovněž definujeme ***levé a pravé prstencové okolí*** *bodu a s poloměrem* δ *jako*

$$P_-(a,\delta) = (a-\delta, a), \quad P_+(a,\delta) = (a, a+\delta).$$

Definice 16 (jednostranná spojitost a limita funkce)**.** *Říkáme, že f je* ***zleva, resp. zprava spojitá*** *v bodě a, pokud platí následující výroky:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : x \in U_-(a,\delta) \implies f(a) \in U(L,\varepsilon),$$

resp.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : x \in U_+(a,\delta) \implies f(a) \in U(L,\varepsilon).$$

Říkáme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ *(jednostranou)* ***limitu*** $L \in \mathbb{R}$ ***zleva, resp. zprava,*** *(píšeme* $\lim_{x\to a-} f(x) = L$, *resp.* $\lim_{x\to a+} f(x) = L$ *), pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : x \in P_-(a,\delta) \implies f(x) \in U(L,\varepsilon),$$

resp.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : x \in P_+(a,\delta) \implies f(x) \in U(L,\varepsilon).$$

Poznámky a příklady. *1. Pro práci s jednostrannými limitami platí stejná pravidla jako pro (oboustranné) limity (poznámky (1)-(4) a aritmetika limit)*

2. *Platí* $\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \iff \left[\left(\lim_{x\to a-} f(x)\right) \wedge \left(\lim_{x\to a+} f(x)\right)\right]$.

3. *Pro funkci*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

platí $\lim_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn} x = \pm 1$, *speciálně, oboustranná limita neexistuje.*

4. $\lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{x^2+x^4}}{x} = \pm 1$.

Derivace

Definice 17. *Derivaci funkce f v bodě a definujeme jako hodnotu*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

pokud limita napravo existuje. Podobně definujeme derivaci zleva, resp. zprava, jako

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad \textit{resp.} \quad f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Poznámky a příklady. 1. *Platí*

$$(f'(a) = L) \iff ((f'_-(a) = L) \wedge (f'_-(a) = L)).$$

2. *Obvykle používáme (nepřesný) zápis typu*

$$(x)',\ (x^2)',\ (\sin x)',\ (e^x)',\ \textit{apod.}$$

3.
   - $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$ *a obecně* $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,
   - $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$, $x > 0$
   - $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,
   - $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 18 (derivace a spojitost)**.** *Pokud existuje $f'(a)$ (vlastní) potom je f spojitá v a.*

Věta 19 (derivace $f+g$, fg a $\frac{f}{g}$)**.** *Platí*

1. $(f+g)' = f' + g'$,
2. $(fg)' = f'g + fg'$,

3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,

kdykoliv má pravá strana smysl.

Věta 20 (derivace složené funkce)**.** *Pokud existují $g'(f(a))$ a $f'(a)$, potom existuje i $(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$*

- $(\mathrm{tg})' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (zde jsme využili $(\cos x)' = -\sin x$),
- $(e^{-x})' = -e^{-x}$,
- (na rozmyšlenou) $(\sinh x)'$ a $(\cosh x)'$

Věta 21 (derivace inverzní funkce - verze 1)**.** *Nechť f je prostá na intervalu (α, β) a zobrazuje jej na interval (γ, δ). Pokud $a \in (\alpha, \beta)$ a platí*

1. *$f'(a)$ existuje a $f'(a) \neq 0$,*
2. *f^{-1} je spojitá v bodě $f(a)$.*

Potom existuje $(f^{-1})'(f(a))$ a platí $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Definice 22. *Budeme říkat, že funkce f je na intervalu I*

- *rostoucí, pokud $f(x) < f(y)$ pro $x, y \in I$, $x < y$,*
- *neklesající, pokud $f(x) \leq f(y)$ pro $x, y \in I$, $x < y$,*
- *klesající, pokud $f(x) > f(y)$ pro $x, y \in I$, $x < y$,*
- *nerostoucí, pokud $f(x) \geq f(y)$ pro $x, y \in I$, $x < y$,*
- *monotonní, pokud platí jedno z výše uvedených,*
- *ryze monotonní, pokud je rostoucí nebo klesající.*

Věta 23. *Pro f na otevřeném intervalu I platí*

- *pokud $f' > 0$ na I, potom f je rostoucí na I,*
- *pokud $f' \geq 0$ na I, potom f je neklesající na I,*
- *pokud $f' < 0$ na I, potom f je klesající na I,*
- *pokud $f' \leq 0$ na I, potom f je nerostoucí na I.*

Věta 24 (derivace inverzní funkce - verze 2)**.** *Nechť f je spojitá a ryze monotonní na intervalu (α, β), $a \in (\alpha, \beta)$, $f'(a)$ exsituje a platí $f'(a) \neq 0$. Potom existuje $(f^{-1})'(f(a))$ a platí $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Věta 25 (derivace inverzní funkce - verze 3). *Nechť $f' > 0$ na intervalu (α, β), nebo $f' < 0$ na (α, β). Potom pro $a \in (\alpha, \beta)$ existuje $(f^{-1})'(f(a))$ a platí $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

Definice 26 (derivace vyšších řádů). *Druhou derivací funkce f v bodě a nazýváme hodnotu*

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

pokud limita napravo existuje. Analogicky definujeme derivace vyšších řádů (rekurentně, pomocí $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$).

Příklad. *Pro $f(x) = x^3 + 4x + 6$ platí*

$$f'(x) = 3x^2 + 4, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0.$$

Věta 27 (Leibnizův vzorec).

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Elementární funkce

Věta 28 (o jednoznačnosti exponenciály). *Existuje nejvýše jedna funkce* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

(E1) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$, $x, y \in \mathbb{R}$,

(E2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Pro tuto funkci pak dále platí

(E3) $\exp 0 = 1$,

(E4) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$, $x \in \mathbb{R}$,

(E5) $\exp x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$,

(E6) $\exp x > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

(E7) $(\exp x)' = \exp x$, $x \in \mathbb{R}$,

(E8) $(\exp x)^{(n)} = \exp x$, $x \in \mathbb{R}$,

(E9) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$,

(E10) exp je spojitá

(E11) obor hodnot exp je $(0, \infty)$

(E12) exp je prostá na $\mathbb{R}$,

(E13) existuje inverzní funkce k exp, kterou značíme $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Pro funkci log dále platí

(L1) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y,\ x, y \in (0, \infty)$,

(L2) $\log \frac{1}{x} = -\log x,\ x \in (0, \infty)$,

(L3) $\log(1) = 0$,

(L4) $(\log x)' = \frac{1}{x}$

(L5) log je rostoucí na $(0, \infty)$,

(L6) log je spojitá na $(0, \infty)$

Pomocí funkcí $\exp x$ (budeme psát, jak je zvykem e^x) a log definujeme obecnou mocninu $a^b = e^{b \log a}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, což nám dává obecnou exponenciálu a^x, $x > 0$, obecnou mocninu x^a, $x > 0$ a logaritmus s obecným základem (jako inverzní funkci k a^x).

Platí navíc, že pro $x > 0$ je tato definice konzistentní s předchozími definicemi x^n a $x^{\frac{1}{n}}$. Dejme ale pozor na to, že tyto funkce jsou definovány na větších intervalech (x^n na $\mathbb{R}$, $x^{\frac{1}{n}}$ na $[0, \infty)$ pro n sudé a na $\mathbb{R}$ pro n liché).

Věta 29 (o jednoznačnosti funkcí sin a cos). *Existuje nejvýše jedna dvojice funkcí* $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a jedno číslo* π *splňující:*

(G1) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ x, y \in \mathbb{R}$,

(G2) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,\ x, y \in \mathbb{R}$,

(G3) $\sin(-x) = -\sin x$ (sin je lichá funkce), $\cos(-x) = \cos x$ (cos je sudá funkce)

(G4) $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$,

(G5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,

Tyto funkce splňují všechny vlastnosti, které od funkcí sin a cos očekáváme, dokázali jsme (nebo alespoň naznačili si důkaz) u:

(G6) $\cos 0 = 1$,

(G7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ x \in \mathbb{R}$,

(G8) $(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

(G9) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$,

(G10) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

(G11) $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

(G12) sin i cos jsou 2πperiodické, tj. $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$.

Zavedli jsme funkce $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotan} c = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Platí

$$D_{\tan x} = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad D_{\operatorname{cotan} x} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

a

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotan} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Omezíme-li definiční obory dostaneme prosté funkce

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \overset{\text{na}}{\to} [-1,1], \quad \cos : [0,\pi] \overset{\text{na}}{\to} [-1,1]$$

a

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \operatorname{cotan} : (0,\pi) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R},$$

které jsou ryze monotonní a jejichž derivace je (mimo krajní body) nenulová. Existují tedy inverzní funkce

$$\arcsin : [-1,1] \overset{\text{na}}{\to} [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad \arccos : [-1,1] \overset{\text{na}}{\to} [0,\pi]$$

a

$$\arctan : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \quad \operatorname{arccotan} : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (0,\pi),$$

S pomocí věty o derivaci inverzní funkce spočítáme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

a

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotan} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dále jsme uvažovali funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotanh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Platí, že sinh, tanh a cotanh jsou liché a cosh je sudá a platí i důležitá identita

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Dále

$$D_{\sinh} = D_{\cosh} = D_{\tanh} = \mathbb{R}, \quad D_{\operatorname{cotanh}} = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a (na celých definičních oborech)

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

a

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\operatorname{cotanh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Omezíme-li případně definiční obory dostaneme prosté funkce

$$\sinh : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \cosh : [0, \infty) \overset{\text{na}}{\to} [1, \infty)$$

a

$$\tanh : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (-1, 1), \quad \operatorname{cotanh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \overset{\text{na}}{\to} (-\infty, 1) \cup (1, \infty),$$

které jsou ryze monotonní (u *cotanh* na obou intervalech, prostý je ale na celém definičním oboru) a jejichž derivace je (mimo krajní body) nenulová. Existují tedy inverzní funkce

$$\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \operatorname{argcosh} : [1, \infty) \overset{\text{na}}{\to} [0, \infty)$$

a

$$\operatorname{argtanh} : (-1, 1) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}, \quad \operatorname{argcotanh} : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Opět (s pomocí věty o derivaci inverzní funkce) spočítáme

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$$

a

$$(\operatorname{argtanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1, \quad (\operatorname{argcotanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1.$$

Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 30 (primitivní funkce). *Pro otevřený interval I říkáme, že funkce $F : I \to \mathbb{R}$ je primitivní funkcí k funkci $f : I \to \mathbb{R}$ na I, pokud $F' = f$ na I.*

Definice 31 (neurčitý integrál). *Množinu všech primitivních funkcí k funkci f (na I) značíme $\int f(x)\,dx$ a nazýváme neurčitým integrálem funkce f (na I).*

Je-li F primitivní funkcí k funkci f, platí $\int f(x)\ dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$, což zkráceně zapisujeme $\int f(x)\ dx \overset{c}{=} F(x)$ a říkáme, že neurčitý integrál z funkce f je až na konstantu roven funkci F. Často též uvidíte zápis $\int f(x)\ dx = F(x) + C$. Rovněž často vynecháváme závislost na x i symbol dx.

Věta 32 (linearita primitivních funkcí). *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta g$ (na intervalu I).*

Věta 33 (per partes pro neurčitý integrál)**.** *Nechť f a g jsou definované na intervalu (a,b) a nechť f' a g' existují (vlastní) na (a,b). Potom*

$$\int fg' = fg - \int f'g \quad (na\ (a,b)),$$

pokud integrál napravo existuje.

Věta 34 (1. věta o substituci pro neurčitý integrál)**.** *Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ mají vlastní derivaci ve všech bodech intervalu (a,b) resp. (α,β). Potom*

$$\int \varphi'(t) \cdot f' \circ \varphi(t)\, dt \stackrel{c}{=} f \circ \varphi \quad na\ (\alpha,\beta).$$

Věta 35 (2. věta o substituci pro neurčitý integrál)**.** *Nechť φ má vlastní a všude kladnou, nebo všude zápornou derivaci na intervalu (α,β) a nechť $\varphi : (\alpha,\beta) \stackrel{na}{\to} (a,b)$. Pokud ja f definována na intervalu (a,b) a H je primitivní funkce k $\varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)$ na (α,β), potom*

$$\int f(t)\, dt \stackrel{c}{=} H \circ \varphi^{-1}(t) \quad na\ (a,b).$$

Věta 36 (o lepení)**.** *Nechť $f : (a,c) \to \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce k f na (b,c). Potom existují limity*

$$\lim_{x\to b-} F(x) = L^-, \quad a \quad \lim_{x\to b+} G(x) = L^+$$

a funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,b), \\ G(x) - L^+ + L^-, & x \in (b,c), \\ L^-, & x = b, \end{cases}$$

je primitivní funkcí k f na (a,c).

Poznámky a příklady. *1. Metodu per partes používáme často přímo, např.*

$$\int x \cos x = \ dx = x \sin x - \int \sin x\, dx \stackrel{c}{=} x \sin x.$$

Obecně pro P polynom a f zpravidla jednu z funkcí e^x, e^{-x}, $\sin x$, $\cos x$ (případně $\sinh x$, $\cosh x$)

$$\int P(x) f(x)\, dx$$

budeme P při per pertes derivovat (i několikanásobně) a f integrovat

2. *Naopak, pro P polynom a f zpravidla jednu z inverzních funkcí $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtanh} x$, $\operatorname{argcotanh} x$*

$$\int P(x) f(x)\, dx$$

budeme P při per pertes integrovat a f derivovat.

3. *Per partes používáme rovněž nepřímo (mnoha způsoby) následujícím způsobem spočteme důležitý integrál: nejprve označme* $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$ *pro* $n \in \mathbb{N}$. *Předně*

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx \stackrel{c}{=} \arctan x.$$

Dále

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx &= \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx - 2n \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$

Po přeskupení členů dostáváme

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right).$$

4. *Pro použití první věty o substituci nebudeme mít vždy integrand v ideálním tvaru* $f' \circ \varphi \cdot \varphi'$, *ale je potřeba jej upravit. Např. pro substituci* $t = e^x$, $dt = e^x\, dx$,

$$\int f(e^x)\, dx = \int \frac{f(e^x)}{e^x} e^x\, dx - \int \frac{f(t)}{t}\, dt$$

Potobně pro substituci $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$,

$$\begin{aligned} \int \sin^{2n+1} x\, dx &= \int \sin x (\sin^2 x)^n\, dx \\ &= -\int -\sin x (1-\cos^2 x)^n\, dx = -\int (1-t^2)^n\, dt. \end{aligned}$$

5. *Podobně postupujeme u snadné, ale velmi užitečné tzv. lineální substituce* $t = ax+b$, $dt = a\, dx$,

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int a\, f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int f(t)\, dt.$$

Derivace vnitřní funkce je pouze konstanta, kterou můžeme integrál vždy přenásobit.

6. *Rovněž často používáme tzv. kvadratickou substituci* $t = ax^2+bx+c$, $dt = 2ax+b$,

$$\int (2ax+b) \cdot f(ax^2+bx+c)\, dx = \int f(t)\, dt.$$

Např.

$$\int x e^{-x^2}\,dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

7. *(důležitý) pomocí lineární substituce spočítáme pro* $m \in \mathbb{N}$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}$$

v případě, že kvadratický polynom x^2+px+q *nemá reálné kořeny. Potom totiž pro* $a = \frac{p}{2}$ *a* $b = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ *platí* $x^2+px+q = (x+a)^2+b^2$ *(nechvalně známé doplnění na čtverec) a můžeme psát (lineárlní substituce v posledním kroku* $t = \frac{x+a}{b}$, $dt = \frac{1}{b}\,dx$*)*

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m} = \int \frac{1}{((x+a)^2+b^2)^m}\,dx = \frac{1}{b^{2m}} \int \frac{1}{((\frac{x+a}{b})^2+1)^m}\,dx$$
$$= \frac{1}{b^{2m-1}} \int \frac{1}{(t^2+1)^m}\,dt.$$

Integrál na konci už umíme spočítat pomocí příkladu (3).

Parciální zlomky

Nyní se budeme zabývat integrací racionálních funkcí, tj. funkcí f ve tvaru $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy.

Na rozehřátí nejprve vyjádříme $f(x)$ ve tvaru $\dfrac{R(x)}{T(x)} + S(x)$, kde

- R, S a T jsou polynomy,
- R a T nemají společné kořeny (ani komplexní),
- $\deg R < \deg T$,
- koeficient u nejvyšší mocniny T (tzv. vedoucího monočlenu) ja roven 1.

V následujícím kroku polynom T zapíšeme ve tvaru

$$T(x) = (x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_M)^{m_M}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdots(x^2+p_Nx+q_N)^{n_N}.$$

Zde a_i odpovídají reálným kořenům T a násobností m_i a kvadratické polynomy $x^2+p_jx+q_j = (x-\beta_j)(x-\overline{\beta}_j)$ odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů T a násobností n_j (takový tvar existuje, protože T má pouze reálné koeficienty).

Věta 37. *Nechť polynomy R a T splňují podmínky výše, potom exsitují (jednoznačně určené) koeficieny A_i^k, B_j^l a C_j^l (indexy v rozsahu, jako suma níže), že*

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_i^k}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{n_i} \frac{B_j^l x + C_j^l}{(x^2+p_jx+q_j)^l}.$$

Za každý člen $(x-a)^k$ v rozvoji T tedy do sumy napravo přidáme k členů (parciálních zlomků)

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k},$$

každý člen $(x^2+px+q)^k$ v rozvoji T pak do sumy napravo přidá k členů (parciálních zlomků)

$$\frac{B_1x+C}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Spočítali jsme (pomocí tzv. zakrývací metody)

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

Pomocí převodu na soustavu lineárních rovnic pak

$$\frac{x+1}{(x^2+1)x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x-1}{x^2+1}$$

Parciální zlomky integrujeme následovně: u reálných kořenů rovnou použijeme lineární substituci

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} A\log|x-a|, & k=1,\\ \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}, & k>1. \end{cases}$$

U kvadratických členů parciální zlomek nejprve rozložíme

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \int \frac{C-\frac{pB}{2}}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

První člen pak spočítáme pomocí kvadratické substituce

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \begin{cases} \log(x^2+px+q), & k=1,\\ \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}, & k>1. \end{cases}$$

Druhý integrál jsme už počítali (viz výše).

Následující standardní substituce převádějí mnoho integrálů na parciální zlomky (R je vždy racionální funkce více proměnných)

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx \quad\to\quad t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

Například (pro $t=\sqrt{x+1}$, $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$)

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2-1+t}\,dt$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\ dx \quad \to \quad t = \tan x,$$

Např. (používáme $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{t^2+1}$, $\cos^2 = \dfrac{1}{t^2+1}$, $\sin x \cos x = \dfrac{t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{1}{t^2+1}\ dt$)

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x + 2}\ dx = \int \frac{\frac{1}{t^2+1}}{\frac{t}{1+t^2}+2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\ dt = \int \frac{1}{(t^2+1)(2t^2+t+2)}\ dt.$$

Obecně pak můžeme použít

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx \quad \to \quad t = \tan \frac{x}{2}.$$

Kapitolu zakončíme několika příklady na lepení. Spočítáme $\int f(x)\ dx$ pro $f(x) = \max(x^2, 1)$, dostaneme: $\frac{x^3}{3}$ je primitivní funkce k f na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, x je primitivní funkce k f na $(-1, 1)$. Po dvojnásobném lepení dostaneme, že funkce H definovaná jako

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}, & x \in (1, \infty), \\ -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}, & x \in (-\infty, -1), \\ x, & x \in [1, 1], \end{cases}$$

je primitivní funkce funcke k f na $\mathbb{R}$ (poznamenejme, že f je spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ musí exsituvat).

Někdy nudeme muset lepit i v nekonečně mnoha bodech, např. pro funkci $\max(\sin x, 0)$, nebo v následujícím typickém případě (který ovšem nebudeme schopni dopočítat, protože stále ještě neznáme nevlastní limity).

$$\int \frac{1}{\cos^2 x + 2}\ dx = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2+1} + 2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\ dt = \int \frac{1}{2t^2+3}\ dt$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tan x\right).$$

Použili jsme 2. větu o substituci pro $\varphi(x) = \arctan(x)$, $\varphi : (-\infty, \infty) \stackrel{na}{\to} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2}$, kde $f \circ \varphi \cdot \varphi' = \frac{1}{2t^2+3}$ (po úpravě). Primitivní funkci jsme tedy dostali jen na $(a, b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (a pomocí periodičnosti $+k\pi$). Funkce f je ale spojitá na $\mathbb{R}$ a tedy budeme muset lepit (ve všech bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$).

Limity podruhé

Definice 38 (okolí $\pm\infty$). *Pro $\varepsilon > 0$ definujeme okolí a prstencové okolí $\pm\infty$ jako*

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty) = P(+\infty, \varepsilon)$$

a

$$U(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}) = P(-\infty,\varepsilon)$$

Definice 39 (limita funkce - plná verze)**.** *Nechť $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ potom říkáme, že f má v a limitu L (zn. $\lim_{x\to a} f(x) = L$) pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in U(L,\varepsilon).$$

Analogicky definujeme jednostranné limity.

Poznámky a příklady.

1. *I po tomto rozšíření o nevlastní limity platí většina poznatků, které o limitách funkcí už známe (hlavně jednoznačnost a limita složené funkce). Ohledně aritmeriky limit uvidíme později a stejně ohledně věty o dvou strážnících.*

2. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty$, *zde jsme využili, že exp a log jsou rostoucí a na.*

Budeme používat následující značení

$$\lim_{x\to a} f(x) = L+ \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in P_+(L,\varepsilon)$$

a

$$\lim_{x\to a} f(x) = L- \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in P_-(L,\varepsilon)$$

Například $\lim_{x\to 0} \pm x^2 = 0\pm$. Platí následující

Věta 40 (výpočet nevlastních limit)**.** *Platí*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff \lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0\pm$

2. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0\pm} f(\tfrac{1}{x}) = L$

Například $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$ (protože $\lim_{x\to 0} |x| = 0+$). Analogické tvrzení platí i pro jednostranné limity, což dává $\lim_{x\to 0\pm} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$.

Věta 41 (o jednom strážníkovi)**.** *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) a $g > f$ na $P(a,\Delta)$ (resp. $g < f$ na $P(a,\Delta)$). Potom $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$).*

Věta 42 (nekonečno a omezenost)**.** *Platí*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *a* $g > C$ *na* $P(a,\Delta)$, *potom* $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$

2. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *a* $g < C$ *na* $P(a,\Delta)$, *potom* $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *a* $g > C > 0$ *na* $P(a,\Delta)$*, potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \pm\infty$

4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *a* $g < C < 0$ *na* $P(a,\Delta)$*, potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \mp\infty$

Definice 43 (rozšířená reálná osa)**.** *Množinu* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ *nazýváme rozšířenou reálnou osou. Pro prvky* $+\infty$ *a* $-\infty$ *navíc předpokládáme následující vlastnosti:*

1. *pro všechna* $x\in\mathbb{R}$ *platí* $-\infty < x < +\infty$*,*
2. $|\pm\infty| = +\infty$*,*
3. $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$*,* $\pm\infty\cdot(\pm\infty) = +\infty$*,* $\pm\infty\cdot(\mp\infty) = -\infty$*,*
4. *pro všechna* $x\in\mathbb{R}$ *platí* $-\infty + x = -\infty$ *a* $+\infty + x = +\infty$*,*
5. *pro všechna* $x\in\mathbb{R}$ *platí, pokud* $x>0$ *potom* $\pm\infty\cdot x = \pm\infty$*, pokud* $x<0$ $\pm\infty\cdot x = \mp\infty$*,*
6. *pro všechna* $x\in\mathbb{R}$ *platí* $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0$*.*

Poznamenejme, že tzv. neurčité výrazy $-\infty + (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\pm\infty}{+\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, $0\cdot\pm\infty$ a $\pm\infty\cdot 0$ nejsou definovány.

Věta 44 (aritmetika limit - plná verze)**.** *Je-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$*, potom:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$*,*
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$*,*
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$*,*

pokud má odpovídající výraz na pravé straně smysl.

Stále ještě ale neumíme počítat limity typu $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a $\frac{0}{0}$. Např. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$, zde musíme porovnávat jak rychle které funkce jde do $+\infty$. Na to se nám bude hodit následující (nechvalně známá) metoda výpočtu limit:

Věta 45 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť platí* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$*, nebo* $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$*. Nechť dále* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$*. Potom* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Dvojnásobným použitím l'Hospitalova pravidala pak už snadno dostaneme, že platí $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Podobně spočítáme následující důležité limity

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad a>1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = +\infty, \quad \alpha > 0,$$

nebo v reformulaci

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\quad a>1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0,\quad \alpha>0,$$

a $\lim_{x\to0+} x\log x=0$. Ty pak v kombinaci s aritmetikou limit umožňují spočítat mnoho limit typu $\frac{\infty}{\infty}$ a $\frac{0}{0}$, např. (základním trikem je vytknout nejrychlejší člen ze jmenovatele):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+4^x+\log x}{10x^{334}+7^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^7}{7^x}+\frac{4^x}{7^x}+\frac{\log x}{7^x}}{\frac{10x^{334}}{7^x}+1}=\frac{0+0+0}{0+1}=0.$$

Všechno tohle budeme chtít ještě trochu více formalizovat, což nás dovede k následující kapitole.

Asymptotické porovnávání funkcí

Definice 46 (symboly o, O a $\sim$)**.** *Definujeme následující symboly označující asymptotické vztahy funkcí*

- $f(x)=o(g(x))$, $x\to a$, *pokud* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, *(*$f(x)$ *je malé o* $g(x)$ *pro* x *jdoucí k* a*),*
- $f(x)=O(g(x))$, $x\to a$, *pokud* $|f(x)|\le C|g(x)|$, *pro nějaké* $\delta, C>0$ *a všechna* $x\in P(a,\delta)$, *(*$f(x)$ *je velké o* $g(x)$ *pro* x *jdoucí k* a*),*
- $f(x)\sim g(x)$, $x\to a$, *pokud* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, *(*$f(x)$ *a* $g(x)$ *jsou asymptoticky ekvivalentní pro* x *jdoucí k* a*)*

Poznámky a příklady.

1. *Při psaní výše uvedených často vynecháváme proměnnou* x *(třeba píšeme* $f\sim g$, $x\to a$*). Někdy se rovněž místo* $f=O(g)$ *píše* $f\ll g$ *a* $f\sim g$ *se někdy používá pokud* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *- tzv. slabá ekvivalence, a pro* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ *se používá* $f\simeq g$ *- tzv. silná ekvivalence.*
2. *pokud* $f=o(g)$, $x\to a$, *potom* $f=O(g)$, $x\to a$ *(důsledek věty limita a omezenost),*
3. *pokud* $f=O(g)$ *a* $g=O(h)$, *potom* $f=O(h)$ *(vše* $x\to a$*),*
4. *pokud* $f_1\sim g_1$ *a* $f_2\sim g_2$, *potom* $f_1f_2\sim g_1g_2$, *a* $\frac{f_1}{f_2}\sim\frac{g_1}{g_2}$, *vše* $x\to a$ *(nikoliv však* $f_1+f_2\sim g_1+g_2$*),*
5. $f\sim g$ *je relace ekvivalence*
6. $\sin x\sim x$, $e^x-1\sim x$, $2(1-\cos x)\sim x^2$ *(vše* $x\to0$*)*

7. $x^\alpha = o(a^x)$, $x \to +\infty$, $a > 1$, $\log x = o(x^\alpha)$, $x \to +\infty$, $\alpha > 0$

8. *(důležitý) pro* $T(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$ *(tečna k* f *v* a*) platí* $f(x)-T(x) = o(x-a)$.

Číselné posloupnosti

Definice 47 (číselná posloupnost)**.** *Posloupností budeme nazývat zobrazení* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. *Místo* f *zpravidla píšeme* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *(tedy* $a_n = f(n)$*).*

Příkladem posloupnosti může být třeba geometrická posloupnost $\{q^n\}$, která je ekvivalentem exponenciálné funkce.

Nebudeme (především při výpočtu limit) trvat na tom, aby byla posloupnost definována pro všechna $n \in \mathbb{N}$, stačí, aby byla definována pro všechna dostatečně velká n (podobně, jako u limit funkcí požadujeme pouze, aby funkce byla definována na prstencovém okolí). Např. $\{\frac{1}{n(n-2)}\}$ budeme brát jako posloupnost, i když není definována pro $n = 2$.

Definice 48 (limita posloupnosti)**.** *Říkáme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má limitu* $L \in \mathbb{R}^*$ *(píšeme* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$*), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, \, n \geq n_0 : a_n \in U(L, \varepsilon)$$

Poznámky a příklady. 1. *Pro funkci* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *(nebo jen definovanou na okolí* $+\infty$*) můžeme definovat posloupnost* $a_n = f(n)$*, pak platí* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. *Zároveň můžeme (mnoha způsoby) posloupnost rozšířit posloupnost na funkci splňující* $f(n)$*, čímž můžeme někdy převést tvrzení platná u limit funkcí na limity posloupností.*

Například jsme si ukázali dva strážníky pro posloupnosti, tedy tvrzení:

pokud platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro všechna dostatečně velká* n *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$*, potom* $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

Nebo (což je obvykle snazší) můžeme variantu tvrzení tvrzení pro posloupnosti dokázat takřka identickým způsobemým, jako jsme dokazovali variantu pro funkce. To platí například o aritmetice limit, kterou budeme používat i pro posloupnosti. A stejně tak pro dělení nulou:

pokud $a_n > 0$ *pro všechna dostatečně velká* n *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*, potom* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$ *(a podobně pro* $a_n < 0$ *a* $-\infty$*).*

2. *Eulerovo číslo e (které jsme definovali jako* $\exp(1)$*) se obvykle definuje pomocí limity posloupnosti* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$*. Obecně platí* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$*, což by mohl být způsob jak funkci exp definovat (kdybychom uměli limitu spočítat bez využití této funkce). Rovněž to dává vhled do toho, co vůbec funkce* e^x *znamená.*

3. *(geometrická posloupnost) kombinací známých limit z funkcí (a dvou strážníků) dostaneme* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1, \\ 1, & q = 1, \\ 0, & -1 < q < 1. \end{cases}$ *Na případ* $q \leq -1$ *si ještě počkáme, i když bychom jej mohli snadno vyřešit třeba z definice.*

4. *Bez důkazu jsme si uvedli následující základní limity posloupností:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Definice 49 (monotonní posloupnost)**.** *Posloupnost* $\{a_n\}$ *nazveme*

- **rostoucí**, *pokud* $a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, *pokud* $a_{n+1} < a_n$, $n \in \mathbb{N}$,
- **neklesající**, *pokud* $a_{n+1} \geq a_n$, $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, *pokud* $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice 50 (omezená posloupnost)**.** *Posloupnost* $\{a_n\}$ *nazveme*

- **shora omezenou**, *pokud existuje* $C \in \mathbb{R}$, *že* $a_n \leq C$, $n \in \mathbb{N}$
- **zdola omezenou**, *pokud existuje* $C \in \mathbb{R}$, *že* $a_n \geq C$, $n \in \mathbb{N}$
- **omezenou**, *pokud je shora i zdola omezená (tj. existuje* $C \in \mathbb{R}$, *že* $|a_n| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$*).*

Věta 51 (limita monotonní posloupnosti)**.** *Platí*

1. *Každá monotonní posloupnost má limitu.*
2. *Každá shora omezená neklesající (nebo zdola omezená nerostoucí) posloupnost konverguje.*

Tato věta má rozličené teoretické i praktické důsledky, například často pomůže při výpočtu limit rekurentně zadaných posloupností, což jsme ilustrovali na Fibonacciho posloupnosti $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n > 1$, $a_1 = a_2 = 1$.

Vraťme se ještě ke geometrické posloupnosti pro $q \leq -1$, např. pro $q = -1$ má tvar $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Vidíme že obsahuje dvě posloupnosti $-1, -1, -1, \ldots$ (liché členy) a $1, 1, 1, \ldots$ (sudé členy), které zřejmě limitu mají.

Definice 52 (vybraná posloupnost)**.** *Říkáme, že posloupnost* $\{b_k\}$ *je* **vybraná posloupnost** *(podposloupnost) z posloupnosti* a_n*, pokud existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel* n_k *taková, že* $b_k = a_{n_k}$ *(můžeme si ji tedy představovat jako složenou funkci, vnitřní funkce je* $k \mapsto n_k$ *a vnější* $n \mapsto a_n$*).*

Protože pro $\{n_k\}$ jako v definici výše vždy platí $n_k \geq k$ dostaneme přímo z definice limity posloupnosti, že $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \implies \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = L$. Z toho pak například okamžitě vidíme, že $\{q^n\}$ pro $q \leq -1$ nemůže mít limitu, protože liché a sudé členy mají sice limity, ale různé (a limita je určena jednoznačně).

Věta 53 (Bolzano-Weierstrassova). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Věta 54 (Heineho). *Je-li funkce f definována na $P(a,\delta)$, potom je ekvivalentní*

1. $\lim\limits_{x\to a} = L$,
2. *pro každou posloupnost* $\{a_n\} \subset D_f \setminus \{a\}$ *splňující* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, *platí* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = L$.

Věta 55 (Heineho pro spojitost). *Je-li funkce f definována na $U(a,\delta)$, potom je ekvivalentní*

1. *f je spojitá v a,*
2. *pro každou posloupnost* $\{a_n\} \subset D_f \setminus \{a\}$ *splňující* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, *platí* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$.

Věta 56 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnosti). *Pro posloupnost $\{a_n\}$ je ekvivalentní*

1. *a_n je konvergentní,*
2. $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,N \in \mathbb{N}\;\forall\,m,n \in \mathbb{N},\; n,m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Věta 57 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro funkce). *Pro funkci f je ekvivalentní*

1. *f má v a vlastní limitu,*
2. $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,x,y \in P(a,\delta) : |f(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Definice 58 (limes superior a limes inferior). *Definujeme*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}, & \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ +\infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}, & \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznamenejme, že limity ve výše uvedené definici vždy existují (z důvodu monotonie). Platí $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ a $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$. Rovněž platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \iff \left(\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = L\right)$$

Hlubší vlastnosti funkcí

Definice 59 (lokální extrémy). *Je li funkce f definována na okolá bodu a, potom říkáme, že f má v bodě a*

- **lokální minimum**, *pokud existuje $\delta > 0$, že platí: $x \in P(a, \delta) \implies f(x) \geq f(a)$,*
- **lokální maximum**, *pokud existuje $\delta > 0$, že platí: $x \in P(a, \delta) \implies f(x) \leq f(a)$,*
- *obdobně definujeme* **ostré lokální minimum** *a* **ostré lokální maximum** *nahrazením příslušné nerovnosti nerovností ostrou.*

Věta 60 (nutná podmínka pro lokální extrém). *Existuje-li $f'(a)$ a f má v bodě lokální extrém, potom $f'(a) = 0$.*

Definice 61 (globální extrémy). *Je li funkce f definována na množině M (tj. $M \subseteq D_f$). Potom říkáme, že f má v bodě $a \in M$*

- **globální minimum** *vzhledem k M, pokud platí: $x \in M \setminus \{a\} \implies f(x) \geq f(a)$,*
- **globální maximum** *vzhledem k M, pokud platí: $x \in M \setminus \{a\} \implies f(x) \leq f(a)$,*
- *obdobně definujeme* **ostré globální minimum** *a* **ostré globální maximum** *nahrazením příslušné nerovnosti nerovností ostrou.*
- *Je-li $M = D_f$, pak část "vzhledem k M" zpravidla vynecháváme.*

Definice 62 (spojitost na intervalu). *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, potom říkáme, že f je spojitá na $[a, b]$, jestliže platí*

- *f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$,*
- *f je zleva (resp. zprava) spojitá v b (resp. v a).*

Analogicky definujeme funkce spojité na ostatních typech intervalů (tj. (a, b), $[a, b)$ a $(a, b]$).

Množinu všech funkcí spojitých na intervalu I budeme značit $C(I)$.

Věta 63 (existence extrémů na intervalu). *Každá $f \in C([a, b])$ nabývá (vzhledem k $[a, b]$) globálního maxima i minima.*

Ukázali jsme si na příkladu funkce $x^3 - x$, $x \in [-1, 2]$, jak s pomocí posledních dvou vět vyšetřovat globální extrémy funkcí a uzavřených intervalech.

Věta 64 (Darbouxova vlastnost pro spojité funkce). *Je-li $f \in C([a, b])$, potom $f([a, b])$ je omezený uzavřený interval.*

Věta 65 (Darbouxova vlastnost pro $C((a,b))$). *Je-li $f \in C((a,b))$ ryze monotonní, potom $f((a,b))$ je otevřený interval.*

Věta 66 (spojitost inverzní funkce). *Je-li $f \in C((a,b))$ ryze monotonní, potom f^{-1} je spojitá (ve všech bodech definičního oboru).*

Pomocí této věty jsme konečně splatili dluh a dokázali Větu 24 a Větu 25. Dalším dluhem je Věta 23, která snadno vyplyne z blížící se Věty 68.

Věta 67 (Rolleova). *Je-li $f \in C([a,b])$, $a < b$, f' existuje na (a,b) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $\xi \in (a,b)$, že $f'(\xi) = 0$.*

Věta 68 (Lagrangeova o střední hodnotě). *Je-li $f \in C([a,b])$, $a < b$, f' existuje na (a,b). Potom existuje $\xi \in (a,b)$, že $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Věta 69 (derivace a monotonie - kdysi jako Věta 23). *Je-li $f \in C((a,b))$ a existuje-li f' na (a,b), potom:*

1. *pokud $f' > 0$ na (a,b), potom f je rostoucí na (a,b),*
2. *pokud $f' < 0$ na (a,b), potom f je klesající na (a,b),*
3. *pokud $f' \geq 0$ na (a,b), potom f je neklesající na (a,b),*
4. *pokud $f' \leq 0$ na (a,b), potom f je nerostoucí na (a,b).*

Poznámky a příklady.

- *předpoklady předchozí věty můžeme nahradit předpokladem f' existuje na (a,b) vlastní (existence vlastní derivace implikuje spojitost)*
- *pokud bychon navíc předpokládali $f \in C([a,b])$, platila by (odpovídající) monotonie na $[a,b]$ (a analogicky pro $(a,b]$ a $[a,b)$)*
- *implikace (3) a (4) lze nahradit ekvivalencemi, implikace (1) a (2) však ekvivalencemi nahradit nelze (př. x^3 a $-x^3$)*
- *určení intervalů monotónie může pomoci při zkoumání extrémů, vrátíme-li se k příkladu $f(x) = x^3 - x$ (tentokrát $x \in \mathbb{R}$), už víme, že lokální extrémy mohou být pouze v bodech $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (nezjistili jsme však, jestli to opravdu lokální extrémy jsou). Protože $f'(x) = 3x^2 - 1$ platí*

  $$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty), \quad f'(x) < 0 \iff x \in (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

  a věta dává

  $$f \text{ je rostoucí na } (-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \text{ a } (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty) \text{ a klesající na } (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

  a podle poznámky výše dokonce (f je spojitá na $\mathbb{R}$)

  $$f \text{ je rostoucí na } (-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}] \text{ a } [\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty) \text{ a klesající na } [-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}].$$

To pak okamžitě dává, že $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ je bodem lokálního maxima f a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ je bodem lokálního minima f. Poznamenejme, že v úvaze jsme nikde nepotřebovali fakt, že $f' = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$. Stejná úvaha by byla možná i kdyby derivace v těchto bodech neexistovala.

Definice 70 (konvexní a konkávní funkce)**.** *Budeme říkat, že funkce f je na intervalu I*

- *konvexní, pokud $f(y) \leq f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*
- *konkávní, pokud $f(y) \geq f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*
- *ryze konvexní, pokud $f(y) < f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*
- *ryze konkávní, pokud $f(y) > f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*

Konvexitu můžeme ekvivalentně formulovat pomocí následujících podmínek

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}, \quad x, y, z \in I,\ x < y < z,$$
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}, \quad x, y, z \in I,\ x < y < z,$$
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}, \quad x, y, z \in I,\ x < y < z,$$

a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad x, y \in I,\ 0 < \lambda < 1,$$

což lze přeformulovat jako

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y), \quad x, y \in I,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Alanogicky můžeme reformulovat konkávitu a ryzí varianty. Poslední formulace má přímé zobecnění ve formě tzv. Jansenovy nerovnosti:

Věta 71 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť f je konvexní na intervalu I, potom pro $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, a všechna $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in (0, 1)$, splňující $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ platí*

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i)$$

a analogicky s opačnou nerovností pro f konkávní.

Věta 72 ((druhá) derivace a konvexita/konkávnita)**.** *Je-li $f, f' \in C((a,b))$ a existuje-li f'' na (a,b), potom:*

1. *pokud $f'' > 0$ na (a,b), potom f je ryze konvexní na (a,b),*
2. *pokud $f'' < 0$ na (a,b), potom f je ryze konkávní na (a,b),*
3. *pokud $f'' \geq 0$ na (a,b), potom f je konvexní na (a,b),*
4. *pokud $f'' \leq 0$ na (a,b), potom f je konkávní na (a,b).*

Platí podobné poznámky jako pro Větu 69 (rozšiřování na uzavřené intervaly a ekvivalenci při neostrých nerovnostech).

Pokud $f'' \geq 0$ na $U(a,\delta)$ potom f' je neklesající na $U(a,\delta)$ (a podobně pro opačnou nerovnost). Odtud snadno dostaneme následující větu:

Věta 73 (postačující podmínka pro extrém)**.** *Nechť f'' existuje na $U(a,\delta)$ a $f'(a) = 0$, potom platí:*

1. *pokud $f'' \geq 0$ na $U(a,\delta)$, potom f má v a lokální minimum,*
2. *pokud $f'' \leq 0$ na $U(a,\delta)$, potom f má v a lokální maximum.*

Příklady: e^x je konvexní na $\mathbb{R}$, $\log x$ je konkávní na $(0,\infty)$, $\arctan x$ je konvexní na $(-\infty, 0]$ a konkávní na $[0,\infty)$ ($(\arctan x)'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$). Všimněme si, že v bodě f přechází konvexita na konkávitu, takovým bodům říkáme inflexní.

Definice 74 (inflexní bod)**.** *Říkáme, že a je inflexním bodem funkce f, pokud $f'(a)$ existuje vlastní a existuje $\delta > 0$, že*

$$f \textit{ je konvexní na } P_-(a,\delta) \textit{ a konkávní na } P_+(a,\delta),$$

nebo

$$f \textit{ je konvexní na } P_+(a,\delta) \textit{ a konkávní na } P_-(a,\delta).$$

Platí, že pokud $f''(a)$ existuje a a je inflexním bodem funkce f, potom $f''(a) = 0$.

Definice 75. *Funkci ve tvaru $Ax + B$ nazýváme asymptotou funkce f v $\pm\infty$, pokud platí*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (Ax + B) = 0.$$

Koeficienty asymptoty (pokud existuje) spočítáme pomocí vzorečků

$$A = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad B = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - Ax).$$

Například funkce $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{1+x^2}$ má stejnou asymptotu v $+\infty$ i v $-\infty$ a to $x - 1$. Platí totiž

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x}{1 + x^2} = 1$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x^2}{1+x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2-x}{1+x^2} = -1.$$

Poznamenejme ještě, že pomocí l'Hospitalova pravidla (jsou-li splňeny předloklady) dostaneme vzoreček $A = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$.

Věta 76 (Cauchyova o střední hodnotě)**.** *Je-li $f, g \in C([a,b])$, $a < b$, f' a g' existují na (a,b). Potom existuje $\xi \in (a,b)$, že*

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Jako důsledek Věty 76 jsme si dokázali jednu část l'Hospitalova pravidla (Věta 45). Na závěr ještě jednu větu, kterou jsme dokázali právě jako důsledek l'Hospitalova pravidla:

Věta 77. *Nechť f je spojitá zprava (resp. spojitá zleva) v bodě a a nechť existuje limita $\lim_{x\to a+} f'(x) = L$ (resp. $\lim_{x\to a-} f'(x) = L$). Potom $f'_+(a) = L$ (resp. $f'_-(a) = L$).*

Taylorovy polynomy

Definice 78 (tečna funkce)**.** *Nechť existuje $f'(a) \in \mathbb{R}$ potom funkci*

$$T_{a,f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

nazýváme tečnou funkce f v bodě a.

Už dříve jsme si spočítali, že

$$f(x) - T_{a,f}(x) = o(x-a), \quad x \to a.$$

Pokud bychom chtěli jemnější aproximaci (řádu $o((x-a)^n)$) musíme se (obecně) uchýlit k polynomům vyššího řádu, což je jedna z cest k následující definici:

Definice 79 (Taylorův polynom)**.** *Nechť existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ (nebo, ekvivalentně, existují $f^{(k)} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$). Potom definujeme polynom*

$$\begin{aligned} T^n_{a,f}(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

a nazýváme ho Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě a.

Spočítali jsme užitečnou rovnost $(T^n_{a,f})' = T^{n-1}_{a,f'}$, která (násobným použitím a dosazením hodnoty a) dává

$$(T^n_{a,f})^{(k)} = T^{n-k}_{a,f^{(k)}}, \quad \text{a} \quad (T^n_{a,f})^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k \le n.$$

Věta 80 (Peanův tvar zbytku). *Platí* $f(x) - T^n_{a,f}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Výraz $R^n_{a,f}(x) = f(x) - T^n_{a,f}(x)$ nazýváme zbytkem Taylorova polynomu $T^n_{a,f}(x)$, předchozí větu lze tedy zformulovat ve tvaru $R^n_{a,f}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Tento kvalitatavní výsledek má pro nás následující dva důsledky:

Věta 81. *(jemnější podmínky pro extrémy)*

1. *Nechť* $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 1, \dots, 2n-1$, *potom platí:*
   - *je-li* $f^{(2n)}(a) > 0$, *pak má* f *v* a *(ostré) lokální minimum,*
   - *je-li* $f^{(2n)}(a) < 0$, *pak má* f *v* a *(ostré) lokální maximum.*
2. *Nechť* $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 1, \dots, 2n$. *Pokud* $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$, *potom* f *nemá v* a *lokální extrém.*

Druhým důaledkem Věty 80 je následující trik při výpočtu limit: nechť $T^n_{a,f}$ existuje, potom platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T^n_{a,f}(x) + T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{R^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} + \frac{T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} \right) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{T^n_{a,f}(x)}{(x-a)^n}.
\end{aligned}$$

za předpokladu, že limita napravo existuje. To nastává, pokud $f^k(a) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$, tj. $T^n_{a,f}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Takový výpočet limity je vlastně totéž, jako bychom n-krát použili l'Hospitalovo pravidlo, nicméně výhodou výše uvedeného přístupu je, že koeficienty Taylorova polynomu často zjistíme i snadněji, než pracným derivováním.

Z definice jsme odvodili následující Taylorovy polynomy:

$$\begin{aligned}
T^n_{0,e^x}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{n!}, \\
T^{2n}_{0,\sinh x}(x) = T^{2n-1}_{0,\sinh x}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \\
T^{2n+1}_{0,\cosh x}(x) = T^{2n}_{0,\cosh x}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T^{2n}_{0,\sin x}(x) = T^{2n-1}_{0,\sin x}(x) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},\\
T^{2n+1}_{0,\cos x}(x) = T^{2n}_{0,\cos x}(x) &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!},\\
T^{n}_{1,\log x}(x) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(x-1)^k}{k}.
\end{aligned}
$$

Věta 82 (Lagrangeův a Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť $f^{(n)}$ existuje a je spojitá na otevřeném nadintervalu intervalu $[a,x]$, $a<x$, a nechť $f^{(n+1)}$ existuje na (a,x). Potom*

- *existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že*

$$
f(x) - T^{f}_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \textit{(Lagrangeův tvar)}
$$

- *existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že*

$$
f(x) - T^{f}_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n}(x-a), \quad \textit{(Cauchyův tvar)}
$$

Na závěr se ještě podíváme na výpočet Taylorových polynomů, mějme dvě funkce f a g a jejich Taylorovy polynomy 2. stupně v bodě a:

$$
T^2_{a,f}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad \text{a} \quad T^2_{a,g}(x) = g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2}(x-a)^2.
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
T^2_{a,f}(x)\cdot T^2_{a,g}(x) &= \left(f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right)\cdot\left(g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2}(x-a)^2\right)\\
&= f(a)g(a) + (f(a)g'(a)+f'(a)g(a))(x-a)\\
&+ \frac{f(a)g''(a)+2f(a)g(a)+f''(a)g(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)\\
&= (f\cdot g)(a) + (f\cdot g)'(a)(x-a) + \frac{(f\cdot g)''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)\\
&= T^2_{a,f\cdot g}(x) + o((x-a)^2).
\end{aligned}
$$

Ve členu $o((x-a)^2)$ (všude bereme $x\to a$) se schovaly všechny mocniny $(x-a)^k$ pro $k>2$. Polynom $T^2_{a,f\cdot g}(x)$ tedy dostaneme vynásobením $T^2_{a,f}(x)$ a $T^2_{a,g}(x)$ a škrtnutím všech mocnin $(x-a)^k$ pro $k>2$. Postup funguje obecně, tj.

$$
T^n_{a,f}(x)\cdot T^n_{a,g}(x) = T^n_{a,f\cdot g}(x) + o((x-a)^n).
$$

Podobně můžeme postupovat o pro složení $g\circ f$, kde dostaneme

$$
T^n_{f(a),g}\circ T^n_{a,f} = T^n_{a,g\circ f} + o((x-a)^n).
$$

Například jsme spočítali

$$T^6_{0,\sin^4 x}(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^6 \quad \text{a} \quad T^4_{0,e^{x^4}} = 1 + x^4.$$

Odtud třeba snadno vidíme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^4 x}{e^{x^4} - 1} = 1.$

Určité integrály

Definice 83. *Říkáme, že funkce f je omezená na množině $M \subset D_f$, pokud je množina $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$ omezená. Podobně definujeme shora a zdola omezené funkce.*

Definice 84 (dělení intervalu)**.** *Buď $[a, b]$ interval, $-\infty < a < b < \infty$, uspořádanou $(n + 1)$-tici bodů $x_0, \dots, x_n$ nazveme* **dělením intervalu** *$[a, b]$ pokud $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body x_i nazýváme dělícími body dělení D. Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathfrak{D}([a, b])$.*

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}([a, b])$, potom budeme značit

$$\begin{aligned} m_k^D &= \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) =: \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \\ M_k^D &= \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) =: \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}. \end{aligned}$$

Horní index D budeme, nebude-li hrozit nedorozumění, zpravidla vynechávat Rovněž budeme definovat $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Definice 85 (horní a dolní součty)**.** *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$ a $D \in \mathfrak{D}([a, b])$. Definujeme* **horní a dolní** *(riemannovské)* **součty** *funkce f vzhledem k dělení D jako*

$$S(f, D) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k^D \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

a

$$s(f, D) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k^D \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

Základním typem dělení je takzvané **ekvidistantní dělení**, kdy interval $[a, b]$ rozdělíme na n intervalů délky $\dfrac{b-a}{n}$, v tom případě máme $x_k = a + \dfrac{k}{n}(b - a)$, $k = 0, \dots n$. Zvažme například funkci $f(x) = x$ na intervalu $[0, 1]$, ekvidistantní dělení má v tomto případě tvar $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$. Dále máme

$m_k = f(x_k) = \frac{k}{n}$ a $M_k = x_{k+1} = \frac{k+1}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Odtud dostaneme

$$s(f, D) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2}$$

a

$$S(f, D) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

Definice 86 (Riemannův integrál). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$, definujeme* **horní Riemannův integrál** *funkce f od a do b jako*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{S(f, D) : D \in \mathfrak{D}([a, b])\}.$$

a **dolní Riemannův integrál** *funkce f od a do b jako*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{s(f, D) : D \in \mathfrak{D}([a, b])\}$$

Pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ říkáme, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$ (značíme $f \in \mathfrak{R}([a, b])$). Společnou hodnotu pak nazýváme **Riemannovým integrálem** *funkce f od a do b a značíme*

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Budeme li pokračovat v příkladu výše, dostáváme (pro ekvidistantní dělení) pro $n \to \infty$

$$s(f, D) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad S(f, D) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Tedy $\displaystyle\underline{\int_0^1} f \geq \frac{1}{2} \geq \overline{\int_0^1} f$. Rovněž máme

$$s(f, D) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad S(f, D) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Tedy speciálně $s(f, D) \leq \frac{1}{2} \leq S(f, D)$ (pro ekvidistantní dělení i při různém počtu dělících bodů). Pokud by nerovnost $s(f, D) \leq S(f, D')$ platila pro libovolnou dvojici dělení D a D', pak bychom už dostali rovnost $\displaystyle\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \frac{1}{2}$ a tedy i existenci Reimannova integrálu (s hodnotou $\frac{1}{2}$).

Definice 87 (zjemnění a norma dělení). *Pro dělení $D \in \mathfrak{D}([a, b])$ s dělícími body $x_0, \ldots, x_n$ definujeme* **normu dělení** *D (zn. $|D|$) jako $\max_{i=0,\ldots n-1} (x_{i+1} - x_i)$.*

Jsou-li $D, D' \in \mathfrak{D}([a, b])$, říkáme, že D' je **zjemněním** *D pokud všechny dělící body D jsou zároveň dělícími body D'.*

Věta 88 (vlastnosti dělení). *Nechť f je omezená na intervalu $[a,b]$ a nechť $D, D' \in \mathfrak{D}([a,b])$ potom*

1. *pokud D' je zjemněním D, pak*

$$s(f,D) \leq s(f,D') \leq S(f,D') \leq S(f,D),$$

2. *$s(f,D) \leq S(f,D')$, speciálně $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$*

Věta 89 (nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu). *Pro funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí*

$$f \in \mathfrak{R}([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathfrak{D}([a,b]) : S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Věta 90 (monotónnie a Riemannův integrál). *Je-li f monotónní na $[a,b]$, potom platí $f \in \mathfrak{R}([a,b])$.*

Věta 91 (stejnoměrná spojitost spojitých funkcí). *Je-li f spojitá na $[a,b]$ potom platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in [a,b] : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Funkce splňující vlastnost z výše uvedenáé věty se nazývají stejnoměrně spojité.

Věta 92 (spojitost a Riemannův integrál). *Je-li f spojitá na $[a,b]$, potom platí $f \in \mathfrak{R}([a,b])$.*

Věta 93 (vlastnosti Riemannova inregrálu). *Platí následující:*

1. *nechť $f,g \in \mathfrak{R}([a,b])$, $f \leq g$ na $[a,b]$, protom*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx,$$

2. *je-li $f,g \in \mathfrak{R}([a,b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom i $f+g, \alpha f \in \mathfrak{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{a} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

3. *je-li $f \in \mathfrak{R}([a,b])$ potom i $|f| \in \mathfrak{R}([a,b])$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

4. *nechť $f \in \mathfrak{R}([a,b])$, pokud $f = g$ na $[a,b]$ až na konečně mnoho bodů, potom $g \in \mathfrak{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,$$

5. je-li $f \in \mathfrak{R}([a,b])$ a $f \in \mathfrak{R}([b,c])$, potom $f \in \mathfrak{R}([a,c])$ a platí

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Věta 94 (závislost integrálu na horní mezi). *Nechť pro $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ platí, že $f \in \mathfrak{R}([\alpha,\beta])$ pro každý interval $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Zvolme $c \in (a,b)$ a položme*

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,dx.$$

Potom

1. *F je spojitá na (a,b),*
2. *je-li f spojitá v bodě y, potom $F'(y)$ existuje a platí $F'(y) = f(y)$.*

Věta 95 (spojitost a primitivní funkce). *Platí nádledující:*

1. *nechť f je spojitá na intervalu (a,b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, potom f má na (a,b) primitivní funkci,*
2. *nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a nechť F je primitivní funkce k f na (a,b), potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$